$* f_n(-1) = \sqrt{1-1}\,e^{-1} = 0 \Rightarrow A(-1;0) \in C_n$

$* f_n(0) = \sqrt{1+0}\,e^{-0} = 1 \Rightarrow B(0;1) \in C_n$

Conclusion : Les points A et B appartiennent à toutes les courbes C_n.

2)a- $\forall n \in IN^*; f'_n(x)=\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{2\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\sqrt{1+x}=\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{2\sqrt{1+x}}(n-2-2x).$

$\boxtimes\ f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow n-2-2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}n-1.$

D'où C_n possède une seule tangente horizontale en son point M_n d'abscisse $\dfrac{1}{2}n-1$.

b- α_n l'abscisse de $M_n \Leftrightarrow \alpha_n = \dfrac{1}{2}n-1.$

$\forall n \in IN^*; \alpha_{n+1}-\alpha_n=\dfrac{1}{2}(n+1)-1-\dfrac{1}{2}n+1 = \dfrac{1}{2}$ donc (α_n) est une suite aritmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

3) Soit $n \in IN^*$ et $x \in [-1,+\infty[$;

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=\sqrt{1+x}\,e^{-\frac{x}{n+1}}\left[1-e^{-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}\right]=\sqrt{1+x}\,e^{-\frac{x}{n+1}}\left[1-e^{-\frac{x}{n(n+1)}}\right]$

$\Rightarrow Signe[f_{n+1}(x)-f_n(x)] = Signe\left[1-e^{-\frac{x}{n(n+1)}}\right]; \forall x > -1.$

$Or\ 1-e^{-\frac{x}{n(n+1)}} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{n(n+1)}} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{x}{n(n+1)} \leq \ln(1)=0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Ainsi : $\forall x \in [0;+\infty[; f_{n+1}(x)-f_n(x) \geq 0$ donc C_{n+1} est au dessus de C_n.

$\forall x \in [-1;0]; f_{n+1}(x)-f_n(x) \leq 0$ donc C_{n+1} est au dessous de C_n.

4)a- $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\,dx=\int_{-1}^{1}(1+x)'(1+x)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(1+x)^{\frac{1}{2}+1}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$

b- $\forall n \in IN^*, 1-e^{\frac{1}{n}}-\left(e^{\frac{-1}{n}}-1\right) = -e^{\frac{-1}{n}}\left[\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2-2e^{\frac{1}{n}}+1\right]$

$= -e^{\frac{-1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2 \leq 0.$

D'où $1-e^{\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{-1}{n}}-1$

c- Soit $n \in IN^*$ et $x \in [-1,1]$;

$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{-x}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow e^{\frac{-1}{n}} \leq e^{\frac{-x}{n}} \leq e^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow e^{\frac{-1}{n}}-1 \leq e^{\frac{-x}{n}}-1 \leq e^{\frac{1}{n}}-1$

Or $1-e^{\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{-1}{n}}-1$ donc $-\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) \leq e^{\frac{-x}{n}}-1 \leq e^{\frac{1}{n}}-1$

signifie que $\left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right| \leq e^{\frac{1}{n}}-1.$

d- $|A_n-I| = \left|\int_{-1}^{1}f_n(x)dx-\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\left(e^{\frac{-x}{n}}-1\right)dx\right|$

$\overset{th}{\Rightarrow} |A_n-I| \leq \int_{-1}^{1}\left|\sqrt{1+x}\left(e^{\frac{-x}{n}}-1\right)\right|dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right|dx \quad (1)$

Or $\forall x \in [-1,1]; \left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right| \leq e^{\frac{1}{n}}-1$ donc

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\left|e^{\frac{-x}{n}}-1\right|dx \leq \int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)dx$